

HOOFDSTUK 3: De afgeleide functie.

3.1 Toenamendiagrammen

Opgave 1:

Tot halverwege de jaren tachtig was er sprake van toenemende groei, daarna was er sprake van afnemende groei.

Opgave 2:

- $[-3, 2\frac{1}{2}]$ en $[6\frac{1}{2}, 9]$
- $[2\frac{1}{2}, 4]$
- $[4, 5]$
- $[5, 6\frac{1}{2}]$

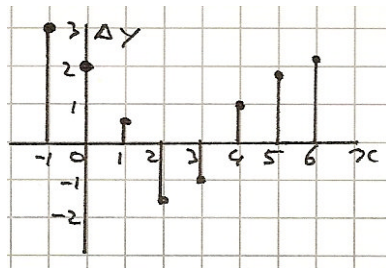
Opgave 3:

$$79000 - 8000 + 2000 - 6000 - 7000 + 5000 = 65000$$

Opgave 4:

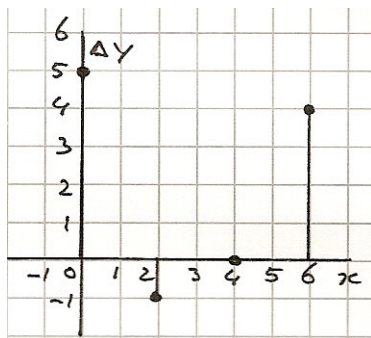
a.

x	y	Δy
-2	-3	-
-1	0	3
0	2	2
1	2,5	0,5
2	1	-1,5
3	0	-1
4	1	1
5	2,8	1,8
6	5	2,2



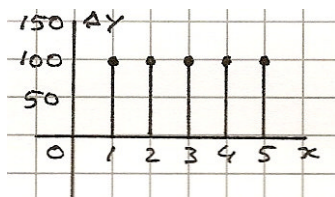
b.

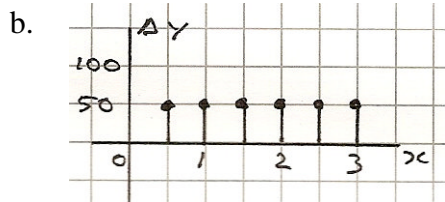
x	y	Δy
-2	-3	-
0	2	5
2	1	-1
4	1	0
6	5	4



Opgave 5:

a.



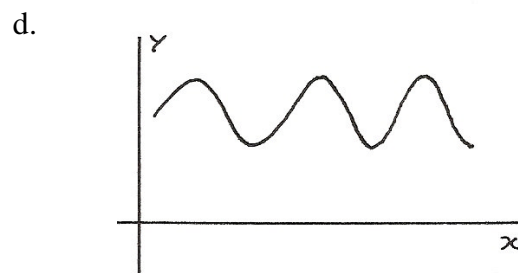
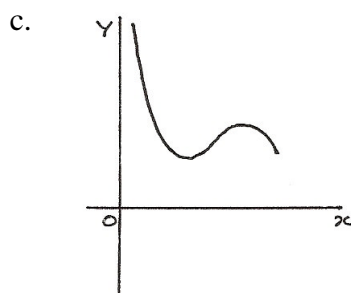
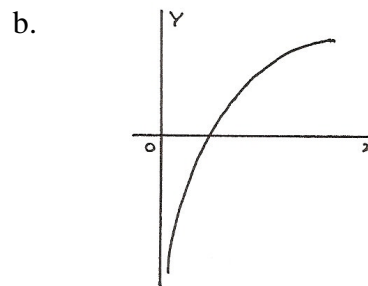
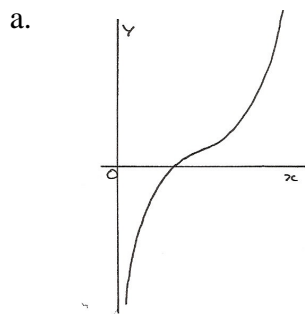


- c. alle lijnstukjes zijn even lang
 d. het toenamendiagram bestaat alleen uit bolletjes die op de x -as liggen.

Opgave 6:

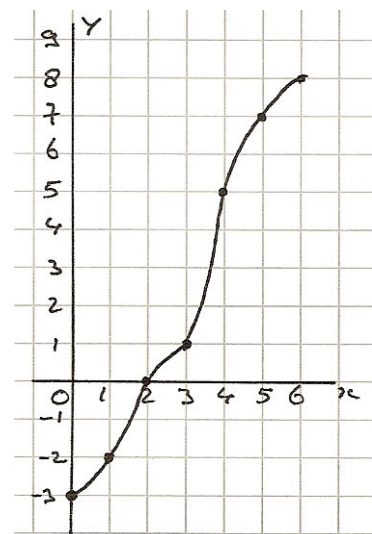
- a. constante daling
 b. afnemende stijging
 c. toenemende stijging
 d. toenemende daling

Opgave 7:



Opgave 8:

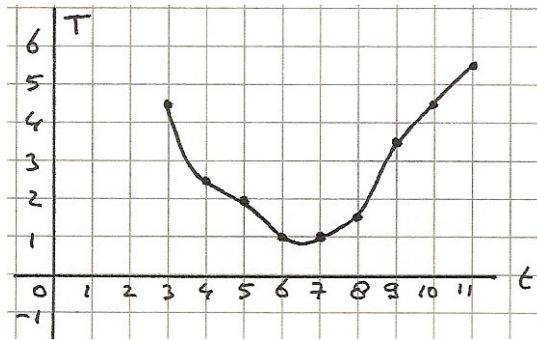
- a. op $[0,1]$ geldt $\Delta y = 1$ dus $y(1) = y(0) + 1 = -3 + 1 = -2$
 b. $y(0) = -3$
 $y(1) = y(0) + 1 = -3 + 1 = -2$
 $y(2) = y(1) + 2 = -2 + 2 = 0$
 $y(3) = y(2) + 1 = 0 + 1 = 1$
 $y(4) = y(3) + 4 = 1 + 4 = 5$
 $y(5) = y(4) + 2 = 5 + 2 = 7$
 $y(6) = y(5) + 1 = 7 + 1 = 8$
 c. Alleen de roosterpunten liggen vast, het toenamendiagram zegt niets over het gedrag van de grafiek tussen deze punten.



Opgave 9:

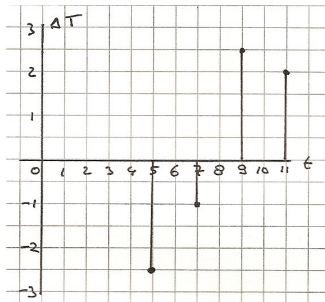
a.

t	ΔT	T
3	-	4,5
4	-2	2,5
5	-0,5	2
6	-1	1
7	0	1
8	0,5	1,5
9	2	3,5
10	1	4,5
11	1	5,5

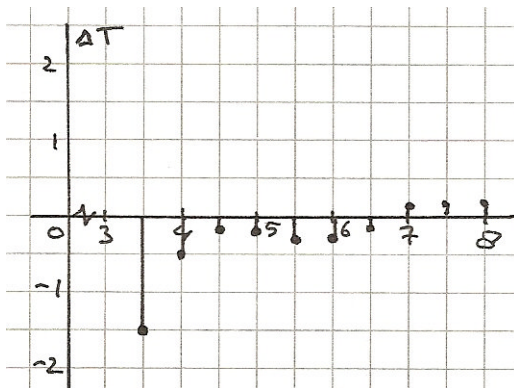


b.

t	ΔT
3	-
5	-2,5
7	-1
9	2,5
11	2



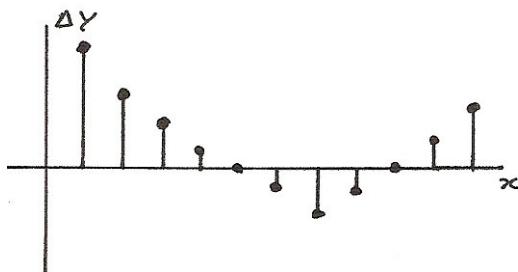
c.



Opgave 10:

a. Eerst liggen de lijntjes boven de x -as, daarna eronder.

b.



HOOFDSTUK 3: De afgeleide functie.

3.2 Het differentiequotient

Opgave 11:

Martijn kijkt alleen naar de getallen in de kolom van ΔN . De periodes waarover deze getallen berekend zijn, zijn niet allemaal even groot, waardoor je de getallen onderling niet met elkaar kunt vergelijken.

Opgave 12:

a. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-1}{4-2} = 2$

b. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{6-2} = \frac{1}{2}$

c. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-1}{0-(-3)} = -\frac{1}{3}$

d. [3,6]

e. [0,2]

Opgave 13:

a. $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{7000-2500}{5-3} = 2250$

b. $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{8500-1000}{6-2} = 1875$

c. Op de vierde dag (dus van $t = 3$ tot $t = 4$)

Opgave 14:

a. $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{90-0}{5-0} = 18$

b. $18 \frac{m}{s}$

Opgave 15:

a. [20,40]: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{12,5-5}{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = 22,5 \frac{km}{uur}$

[30,60]: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{15-10}{1-\frac{1}{2}} = 10 \frac{km}{uur}$

b. de grafiek is geen rechte lijn

c. Teken de lijn door (0,0) en (20,5). Waar deze lijn opnieuw de grafiek snijdt, is het gezochte punt.

Dus voor $t = 60$.

Opgave 16:

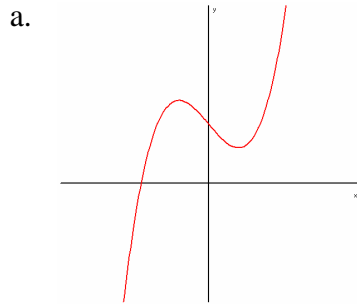
De gemiddelde snelheid wordt steeds kleiner.

Opgave 17:

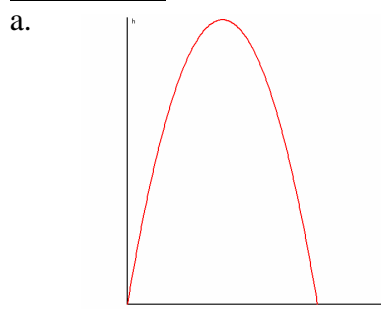
- a. $y_A = -2$ en $y_B = 6$
- b. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{6 - (-2)}{5 - 1} = 2$

Opgave 18:

- a. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{-4 - (-4)}{3} = 0$
- b. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{-6 - 6}{4} = -3$
- c. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-5)}{1 - (-5)} = \frac{-4 - 50}{6} = -9$
- d. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(-5)}{4 - (-5)} = \frac{-4 - 50}{9} = -6$

Opgave 19:

- b. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{23 - 3}{2} = 10$
- c. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \frac{57 - 3}{6} = 9$
- d. $y_A = -13$
 $y_B = 3$
 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - (-13)}{1 - (-3)} = 4$
 $y = 4x + b$ door $(1,3)$
 $3 = 4 + b$
 $b = -1$
 $l: y = 4x - 1$

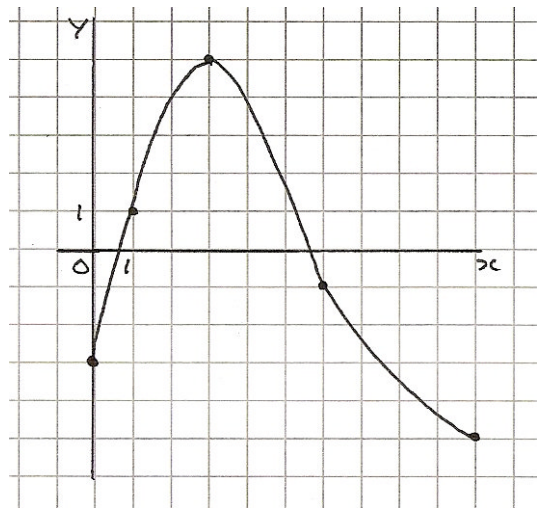
Opgave 20:

- b. $y_1 = -4,9x^2 + 44,1x$ calcmenu optie maximum geeft $t = 4,5$
- c. $h(3) - h(2) = 88,2 - 68,6 = 19,6$
- d. $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{68,6 - 0}{2} = 34,3 \text{ m/s}$
- e. calcmenu optie zero geeft $t = 9$
 dus de steen is terug op de grond op $t = 9$.
 $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(9) - h(8,5)}{9 - 8,5} = \frac{0 - 20,825}{0,5} = -41,65 \text{ m/s}$ (het minteken geeft aan dat de steen naar beneden gaat)

Opgave 21:

- Op $[0,1]$ is $d.q. = 4$ dus de grafiek gaat 1 naar rechts en 4 omhoog, dus door $(1,1)$.
- Op $[1,3]$ is $d.q. = 2$ dus de grafiek gaat 1 naar rechts en 2 omhoog, dus 2 naar rechts en 4 omhoog, dus door $(3,5)$.
- Op $[3,6]$ is $d.q. = -2$ dus de grafiek gaat 1 naar rechts en 2 omlaag, dus 3 naar rechts en 6 omlaag, dus door $(6,-1)$.
- Op $[6,10]$ is $d.q. = -1$ dus de grafiek gaat 1 naar rechts en 1 omlaag, dus 4 naar rechts en 4 omlaag, dus door $(10,-5)$.

Alleen de punten liggen vast, het differentiequotient zegt iets over de gemiddelde verandering.



Opgave 22:

Dat is constant.

HOOFDSTUK 3: De afgeleide functie.

3.3 Raaklijnen en snelheden

Opgave 23:

De gemiddelde snelheid zegt niets over de snelheid op een bepaald moment.

Als je het eerste half uur 20 km/uur rijdt en het tweede half uur 100 km/uur, dan rijdt je gemiddeld 60 km/uur, maar je hebt wel een half uur harder dan de toegestane 80 km/uur gereden.

Opgave 24:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3,01) - s(3)}{3,01 - 3} = \frac{3,62404 - 3,6}{0,01} = 2,404$$

Dus de snelheid op $t = 3$ is bij benadering $2,40 \text{ m/s}$.

Opgave 25:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(1,01) - s(1)}{1,01 - 1} = \frac{6,3389 - 6,3333}{0,01} = 0,55$$

Dus de snelheid op $t = 1$ is bij benadering $0,55 \text{ m/s}$.

Opgave 26:

Als $\Delta t = 0$ komt er zowel in de teller als in de noemer 0 te staan en je kunt niet delen door 0.

Opgave 27:

a. $y_1 = 0,5x^2 - 2x - 2$ calcmenu optie 6 geeft $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3} = 1$

$$y = x + b \text{ door } (3; -3,5)$$

$$-3,5 = 3 + b$$

$$b = -6,5$$

$$k: y = x - 6,5$$

b. calcmenu optie 6 geeft $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=2} = 0$

$$y = b \text{ door } (2, -4)$$

$$-4 = b$$

$$l: y = -4$$

c. calcmenu optie 6 geeft $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = -2$

$$y = -2x + b \text{ door } (0, -2)$$

$$-2 = b$$

$$m: y = -2x - 2$$

d. calcmenu optie 6 geeft $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=-3} = -5$

Opgave 28:

a. $y_1 = 3\sqrt{x+4}$ calcmenu optie 6 geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=5} = 0,5$

$$y = 0,5x + b \text{ door } (5,9)$$

$$9 = 2,5 + b$$

$$b = 6,5$$

$$k: y = 0,5x + 6,5$$

b. calcmenu optie 6 geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=-3} = 1,5$

$$y = 1,5x + b \text{ door } (-3,3)$$

$$3 = -4,5 + b$$

$$b = 7,5$$

$$l: y = 1,5x + 7,5$$

c. calcmenu optie 6 geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2,25} = 0,6$

d. calcmenu optie 6 geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0} = 0,75$

$$y = 0,75x + b \text{ door } (0,6)$$

$$6 = b$$

$$m: y = 0,75x + 6$$

Opgave 29:

a. $y_1 = -x^2 - 2x + 8$ calcmenu optie 6 geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=-2} = 2$

b. calcmenu optie 6 geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0} = -2$

$$y = -2x + b \text{ door } (0,8)$$

$$8 = b$$

$$l: y = -2x + 8$$

c. calcmenu optie zero geeft $x = -4 \quad \vee \quad x = 2$

calcmenu optie 6 geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=-4} = 6$

$$y = 6x + b \text{ door } (-4,0)$$

$$0 = -24 + b$$

$$b = 24$$

$$m: y = 6x + 24$$

$$6x + 24 = -6x + 12$$

$$12x = -12$$

$$x = -1 \text{ dus } y = 18$$

$$S = (-1,18)$$

calcmenu optie 6 geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = -6$

$$y = -6x + b \text{ door } (2,0)$$

$$0 = -12 + b$$

$$b = 12$$

$$n: y = -6x + 12$$

d. $x_R = -3 \quad y_R = 5$

$$x_T = 3 \quad y_T = -7$$

$$rc_{RT} = \frac{-7-5}{3-(-3)} = \frac{-12}{6} = -2$$

Opgave 30:

a. $y_1 = 0,6x^2$ calcmenu optie 6 geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = 3,6$ dus $v(3) = 3,6 \text{ m/s}$

calcmenu optie 6 geeft $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=5} = 6$ dus $v(5) = 6 \text{ m/s}$

b. $s(5) = 15$ dus in de eerste 5 seconden heeft de auto 15 m afgelegd.

Daarna is de snelheid 6 m/s .

Dus na 10 seconden heeft de auto $15 + 5 \cdot 6 = 45$ m afgelegd.

HOOFDSTUK 3: De afgeleide functie.

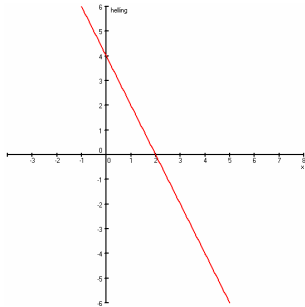
3.4 Limiet en afgeleide

Opgave 31:

- positief ; negatief
- 0
-

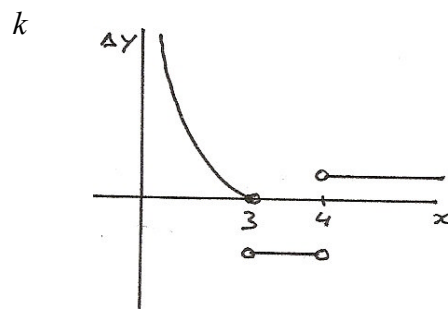
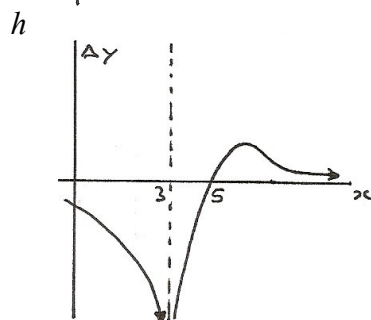
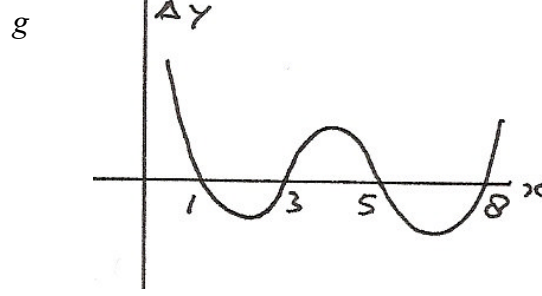
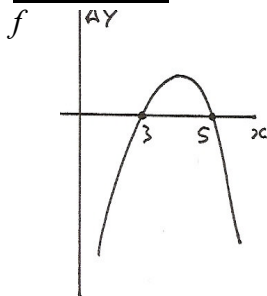
x-coördinaat	-1	0	1	2	3	4
helling in punt	6	4	2	0	-2	-4

d.



e. Deze grafiek geeft voor iedere x de helling van de grafiek van f in het punt $(x, f(x))$

Opgave 32:



Opgave 33:

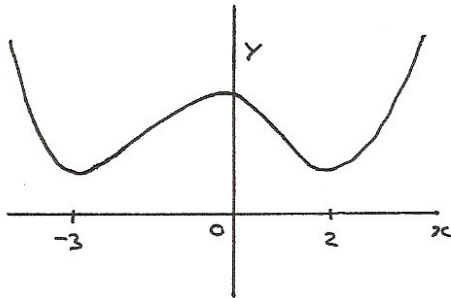
- de hellinggrafiek ligt boven de x -as en is toenemend stijgend
- de hellinggrafiek ligt onder de x -as en is afnemend stijgend.
- voor $x = p$ snijdt de hellinggrafiek de x -as, voor $x < p$ ligt de hellinggrafiek boven de x -as, voor $x > p$ ligt de hellinggrafiek onder de x -as.
- de hellinggrafiek ligt onder de x -as en heeft een laagste punt voor $x = q$.

Opgave 34:

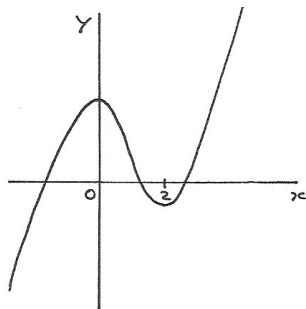
a.

	hellinggrafiek van f	grafiek van f
$\langle -4, -3 \rangle$	onder de x -as	dalend
$x = -3$	snijdt de x -as	top
$\langle -3, 0 \rangle$	boven de x -as	stijgend
$x = 0$	snijdt de x -as	top
$\langle 0, 2 \rangle$	onder de x -as	dalend
$x = 2$	snijdt de x -as	top
$\langle 2, 4 \rangle$	boven de x -as	stijgend

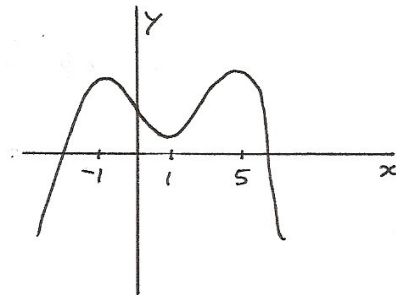
b.

**Opgave 35:**

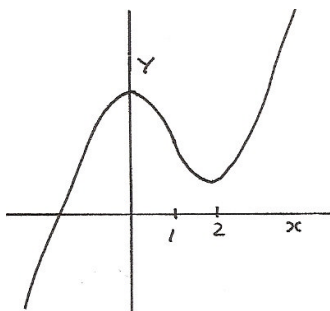
a.



b.



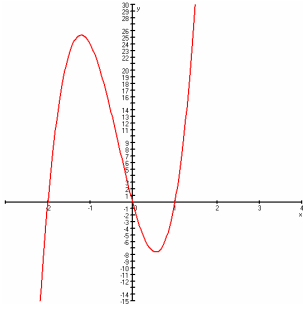
c.



Opgave 36:

a. $y_1 = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$ calcmenu optie minimum en maximum geeft:
(-2,-30) (0,2) (1,-3)

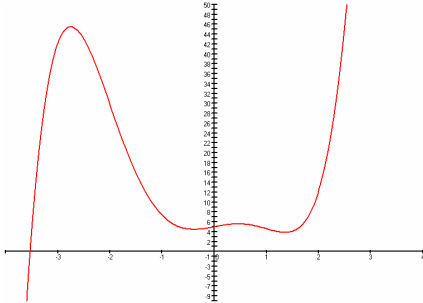
b.



c. calcmenu optie 6 geeft: $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=-1} = 24$

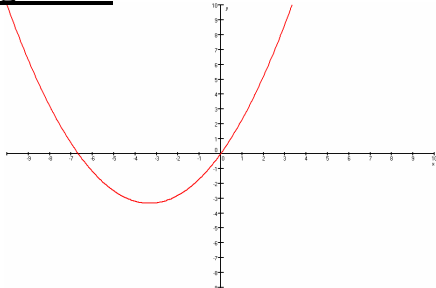
d. calcmenu optie zero geeft: $x = -2,8$, $x = -0,4$, $x = 0,5$, $x = 1,4$

e.

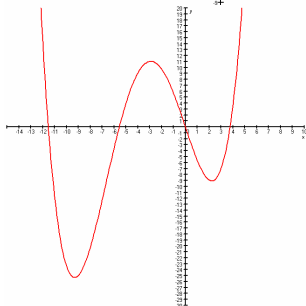


Opgave 37:

a.

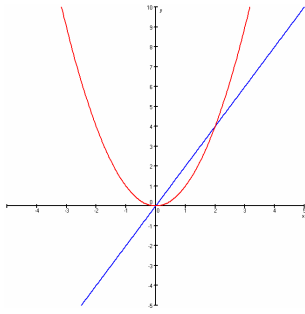


b.

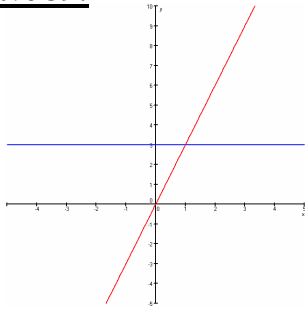


Opgave 38:

a.

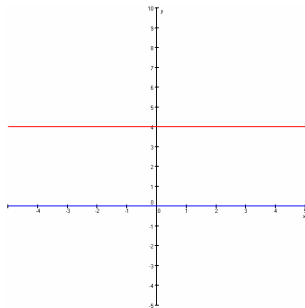
b. $y = 2x$ **Opgave 39:**

a.



b. De helling van de grafiek van f is in ieder punt gelijk aan 3 (=richtingscoëfficiënt).
hellingfunctie: $y = 3$

c.

de hellinggrafiek is de x -asd. $y = 0$ **Opgave 40:**

Anders wordt de noemer 0 en je kunt niet door 0 delen.

Opgave 41:

$$\begin{aligned}
 \text{a. } f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1,5(4+h)^2 - 24}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1,5(16 + 8h + h^2) - 24}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{14 + 12h + 1,5h^2 - 24}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 1,5h^2}{h}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 1,5h) = 12 + 0 = 12$$

$$\begin{aligned} \text{b. } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1,5(x+h)^2 - 1,5x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1,5(x^2 + 2hx + h^2) - 1,5x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1,5x^2 + 3hx + 1,5h^2 - 1,5x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3hx + 1,5h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x + 1,5h) = 3x + 0 = 3x \end{aligned}$$

Opgave 42:

$$\begin{aligned} \text{a. } f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 4(3+h) - (9-12)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 12 - 4h + 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2 + 0 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 4(x+h) - (x^2 - 4x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - 4x - 4h - x^2 + 4x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx - 4h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x - 4 + h) = 2x - 4 + 0 = 2x - 4 \end{aligned}$$

Opgave 43:

$$\begin{aligned} \text{a. } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) - ax}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax + ah - ax}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a - a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0
 \end{aligned}$$

Opgave 44:

$$\begin{aligned}
 \text{a. } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^3 - ax^3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3) - ax^3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax^3 + 3ahx^2 + 3ah^2x + ah^3 - ax^3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3ahx^2 + 3ah^2x + ah^3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (3ax^2 + 3ahx + ah^2) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (3ax^2 + 0 + 0) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x^2 + 2hx + h^2) + bx + bh + c - ax^2 - bx - c}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax^2 + 2ahx + ah^2 + bx + bh + c - ax^2 - bx - c}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ahx + ah^2 + bh}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (2ax + ah + b) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (2ax + 0 + b) = 2ax + b
 \end{aligned}$$

Opgave 45:

$$\begin{aligned}
 \text{a. } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot g(x+h) - c \cdot g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot (g(x+h) - g(x))}{h} \\
 &= c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= c \cdot g'(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b. } s'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

Opgave 46:

- $f'(x) = 30x^5 - 15x^4 + 2$
- $g'(x) = -16x^7 - 16x^3$
- $h'(x) = -x^2 - x - 1$
- $k'(q) = 3 - 6q - 35q^6$

Opgave 47:

- $f(x) = (5x + 7)(4 - 3x) = 20x - 15x^2 + 28 - 21x = -15x^2 - x + 28$
 $f'(x) = -30x - 1$
- $g(x) = (3x + 6)^2 - 8x = 9x^2 + 36x + 36 - 8x = 9x^2 + 28x + 36$
 $g'(x) = 18x + 28$
- $h(x) = 5(x - 3)^2 + 5(2x - 1) = 5(x^2 - 6x + 9) + 10x - 5 = 5x^2 - 30x + 45 + 10x - 5 =$
 $5x^2 - 20x + 40$
 $h'(x) = 10x - 20$
- $k(x) = -3(x - 1)(5 - 9x) - 8(x - 7) = -3(5x - 9x^2 - 5 + 9x) - 8x + 56 =$
 $-15x + 27x^2 + 15 - 27x - 8x + 56 = 27x^2 - 50x + 71$
 $k'(x) = 54x - 50$

Opgave 48:

- $f(x) = (3x - 1)(x^2 + 5x) = 3x^3 + 15x^2 - x^2 - 5x = 3x^3 + 14x^2 - 5x$
 $f'(x) = 9x^2 + 28x - 5$
- $g(x) = (3x^3 - 1)^2 = 9x^6 - 6x^3 + 1$
 $g'(x) = 54x^5 - 18x^2$
- $h(x) = (5x^5 - 3)(3x - 2) = 15x^6 - 10x^5 - 9x + 6$
 $h'(x) = 90x^5 - 50x^4 - 9$
- $k(x) = 5 - 3(x^4 - x)(x + 1) = 5 - 3(x^5 + x^4 - x^2 - x) = 5 - 3x^5 - 3x^4 + 3x^2 + 3x$
 $k'(x) = -15x^4 - 12x^3 + 6x + 3$
- $l(t) = (5t^3 - t)(3t^5 + t) = 15t^8 - 3t^6 + 5t^4 - t^2$
 $l'(t) = 120t^7 - 18t^5 + 20t^3 - 2t$

f. $m(q) = 1 - (3q^2 - 2)^2 = 1 - (9q^4 - 12q^2 + 4) = 1 - 9q^4 + 12q^2 - 4$
 $m'(q) = -36q^3 + 24q$

HOOFDSTUK 3: De afgeleide functie.

3.5 Toepassingen van de afgeleide.

Opgave 49:

- a. $f'(x) = 2x - 3$
 $f'(4) = 5$
 $f(4) = 3$
- b. $f(4)$
- c. $f'(4)$

Opgave 50:

- a. $y_A = f(4) = 2$
 $f'(x) = 1,5x^2 - 4x$
 $rc = f'(4) = 8$
 $y = 8x + b$ door $(4,2)$
 $2 = 32 + b$
 $b = -30$
 $k: y = 8x - 30$
- b. $y_B = f(-2) = -10$
 $rc = f'(-2) = 14$
 $y = 14x + b$ door $(-2,-10)$
 $-10 = -28 + b$
 $b = 18$
 $m: y = 14x + 18$

Opgave 51:

- a. $y_A = g(-3) = 36$
 $g'(x) = 4x - 6$
 $rc = g'(-3) = -18$
 $y = -18x + b$ door $(-3,36)$
 $36 = 54 + b$
 $b = -18$
 $l: y = -18x - 18$
- b. $2x^2 - 6x = 0$
 $2x(x - 3) = 0$
 $x = 0 \vee x = 3$
 $rc = g'(3) = 6$
 $y = 6x + b$ door $(3,0)$
 $0 = 18 + b$
 $b = -18$
 $n: y = 6x - 18$

Opgave 52:

a. $f(x) = (x^2 - 4)(x+1) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

$$y_A = f(-3) = -10$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

$$rc = f'(-3) = 17$$

$$y = 17x + b \text{ door } (-3, -10)$$

$$-10 = -51 + b$$

$$b = 41$$

$$k: y = 17x + 41$$

b. $y_B = f(0) = -4$

$$rc = f'(0) = -4$$

$$y = -4x + b \text{ door } (0, -4)$$

$$-4 = b$$

$$l: y = -4x - 4$$

c. $(x^2 - 4)(x+1) = 0$

$$x^2 = 4 \quad \vee \quad x = -1$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = -2 \quad \vee \quad x = -1$$

$$rc = f'(2) = 12$$

$$y = 12x + b \text{ door } (2, 0)$$

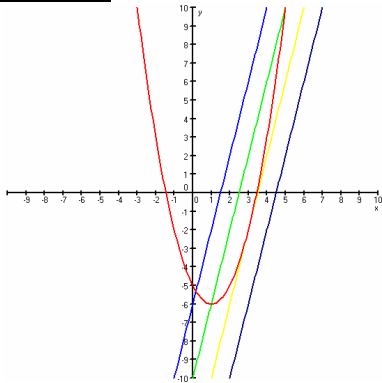
$$0 = 24 + b$$

$$b = -24$$

$$m: y = 12x - 24$$

Opgave 53:

a.



b. $y = 4x - 14$

c. $f'(x_R) = 4$

Opgave 54:

a. $f'(x) = -2x + 2$

$$-2x + 2 = 4$$

$$-2x = 2$$

$$x = -1$$

$$y_A = f(-1) = 0$$

$$A(-1, 0)$$

b. $rc_k = rc_l = -6$
 $f'(x) = -2x + 2 = -6$
 $-2x = -8$
 $x = 4$
 $y_B = f(4) = -5$
 $B(4, -5)$

Opgave 55:

a. $f'(x) = 1,5x^2 - 3$
 $1,5x^2 - 3 = 3$
 $1,5x^2 = 6$
 $x^2 = 4$
 $x = 2 \vee x = -2$
 $y = f(2) = -4 \vee y = f(-2) = 0$
 $(2, -4)$ en $(-2, 0)$

b. $rc = 0$
 $f'(x) = 1,5x^2 - 3 = 0$
 $1,5x^2 = 3$
 $x^2 = 2$
 $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

Opgave 56:

a. $y_p = f(4) = 4\frac{1}{3}$
 $f'(x) = x^2 - 2x$
 $rc = f'(4) = 8$
 $y = 8x + b$ door $(4, 4\frac{1}{3})$
 $4\frac{1}{3} = 32 + b$
 $b = -27\frac{2}{3}$
 $k: y = 8x - 27\frac{2}{3}$

b. $f'(x) = x^2 - 2x = 3$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x+1)(x-3) = 0$
 $x = -1 \vee x = 3$
 $y = f(-1) = -2\frac{1}{3} \vee y = f(3) = -1$
 $Q(-1, -2\frac{1}{3})$ $R(3, -1)$

c. $f'(x) = x^2 - 2x = 0$
 $x(x-2) = 0$
 $x = 0 \vee x = 2$
 $y = f(0) = -1 \vee y = f(2) = -2\frac{1}{3}$
 $(0, -1)$ en $(2, -2\frac{1}{3})$

d. $y_1 = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1$ calcmenu optie zero geeft $x_A = 3,28$

calcmenu optie 6 geeft $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3,28} = 4,19$

$$f'(x) = x^2 - 2x = 4,19$$

$y_1 = x^2 - 2x$ en $y_2 = 4,19$ calcmenu optie intersection geeft $x_B = -1,28$

$$y_B = f(-1,28) = -3,33$$

$$B(-1,28; -3,33)$$

Opgave 57:

a. $v(t) = s'(t) = 1,6t$

$$v(3) = s'(3) = 4,8 \text{ m/s}$$

$$v(6) = s'(6) = 9,6 \text{ m/s}$$

b. $30 \text{ km/uur} = 8\frac{1}{3} \text{ m/s}$

$$1,6t = 8\frac{1}{3}$$

$$t = 5,21$$

c. $s(5) = 20 \text{ m}$

d. $s(6) = 28,8$

na 6 seconden blijft de snelheid $9,6 \text{ m/s}$

$$\text{dus } s(10) = 28,8 + 4 \cdot 9,6 = 67,2 \text{ m}$$

Opgave 58:

a. $v(t) = h'(t) = -10t + 25$

$$v(0) = h'(0) = 25 \text{ m/s}$$

b. $v(3) = h'(3) = -5 \text{ m/s}$ (de bal gaat dus weer omlaag)

c. op het hoogste punt is de snelheid 0

$$v(t) = h'(t) = -10t + 25 = 0$$

$$-10t = -25$$

$$t = 2,5$$

d. $h(t) = -5t^2 + 25t = 0$

$$-5t(t - 5) = 0$$

$$t = 0 \quad \vee \quad t = 5$$

Dus na 5 seconden is de bal weer op de grond.

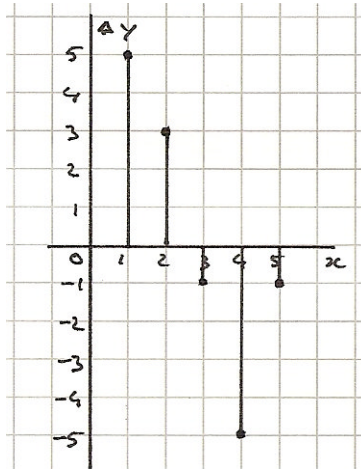
$$v(5) = h'(5) = -25 \text{ m/s}$$

HOOFDSTUK 3: De afgeleide functie.

3.6 Diagnostische toets

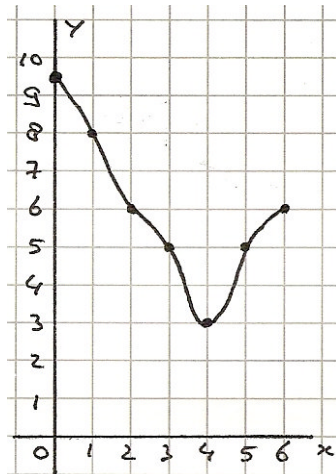
Opgave 1:

x	y	Δy
0	1	-
1	6	5
2	9	3
3	8	-1
4	3	-5
5	2	-1



Opgave 2:

x	Δy	y
0		$9\frac{1}{2}$
1	$-1\frac{1}{2}$	8
2	-2	6
3	-1	5
4	-2	3
5	2	5
6	1	6



Opgave 3:

a.
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(2) - y(0)}{2 - 0} = \frac{9 - 1}{2} = 4$$

b.
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(4) - y(2)}{4 - 2} = \frac{3 - 9}{2} = -3$$

Opgave 4:

a.
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(30) - s(10)}{30 - 10} = \frac{30 - 7}{20} = \frac{23}{20} = 1,15 \text{ m/s} = 69 \text{ km/uur}$$

- b. Teken de lijn door de punten (0,0) en (7,5;6). Waar deze lijn de grafiek nogmaals snijdt, is het gevraagde punt. Dus voor $t = 17,5$.

Opgave 5:

a.
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{8 - -2,5}{3} = 3,5$$

b. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{-2,5 - 0,5}{2} = -1,5$

c. $y_A = f(-2) = -4$
 $y_B = f(3) = -1,5$
 $rc = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1,5 - (-4)}{3 - (-2)} = \frac{2,5}{5} = 0,5$
 $y = 0,5x + b$ door $(-2, -4)$
 $-4 = -1 + b$
 $b = -3$
 $l: y = 0,5x - 3$

Opgave 6:

a. $y_1 = \sqrt{2x - 3}$ calcmenu optie 6 geeft $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=2} = 1$

b. calcmenu optie 6 geeft $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3,5} = 0,5$

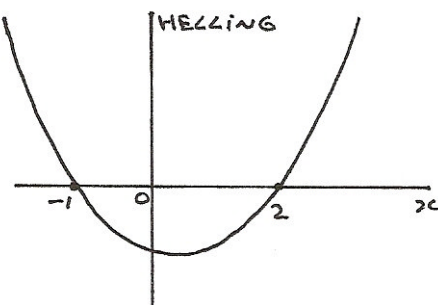
c. $y_B = f(6) = 3$
 $rc = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=6} = \frac{1}{3}$
 $y = \frac{1}{3}x + b$ y door $(6, 3)$
 $3 = 2 + b$
 $b = 1$
 $k: y = \frac{1}{3}x + 1$

Opgave 7:

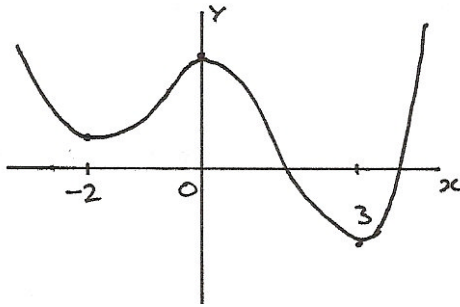
a. $y_1 = -0,25x^3 + 3x^2$ calcmenu optie 6 geeft $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=2} = 9$
dus $v(2) = 9 \text{ m/s}$

b. calcmenu optie 6 geeft $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=6} = 9$
dus $v(6) = 9 \text{ m/s}$
 $s(6) = 54$
 $s(10) = 54 + 4 \cdot 9 = 90 \text{ m}$

Opgave 8:

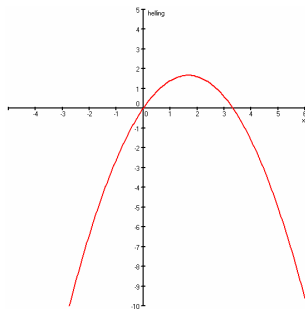


Opgave 9:

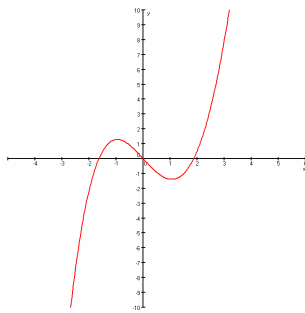


Opgave 10:

a.



b.



Opgave 11:

a. $f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(3+h)^2 + 4 - 49}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(9 + 6h + h^2) - 45}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{45 + 30h + 5h^2 - 45}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{30h + 5h^2}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} (30 + 5h) = 30 + 0 = 30$

b. $f'(10) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x+h)^2 + 4 - (5x^2 + 4)}{h} =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x^2 + 2hx + h^2) + 4 - 5x^2 - 4}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 10hx + 5h^2 - 5x^2}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{10hx + 5h^2}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (10x + 5h) = 10x + 0 = 10x$$

Opgave 12:

- a. $f'(x) = 1,8x^2 - 2,6x$
 b. $g'(p) = 12p^2 + 2p - 11$

Opgave 13:

- a. $f(x) = (3-x)(5+2x) = 15 + 6x - 5x - 2x^2 = -2x^2 + x + 15$
 $f'(x) = -4x + 1$
 b. $g(x) = (3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$
 $g'(x) = 18x + 6$
 c. $h(x) = x(2x-1)^2 = x(4x^2 - 4x + 1) = 4x^3 - 4x^2 + x$
 $h'(x) = 12x^2 - 8x + 1$
 d. $k(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2(x-4) + 6 = \frac{1}{3}x^3 + 2x^3 - 8x^2 + 6 = 2\frac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 6$
 $k'(x) = 7x^2 - 16x$

Opgave 14:

- a. $y_A = f(5) = -3$
 $f'(x) = 0,6x^2 - 6$
 $rc = f'(5) = 9$
 $y = 9x + b$ door $(5, -3)$
 $-3 = 45 + b$
 $b = -48$
 $m: y = 9x - 48$
 b. $y_B = f(0) = 2$
 $rc = f'(0) = -6$
 $y = -6x + b$ door $(0, 2)$
 $2 = b$
 $k: y = -6x + 2$

Opgave 15:

- a. $y_A = f(2) = 9\frac{2}{3}$
 $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$
 $rc = f'(2) = 4$
 $y = 4x + b$ door $(2, 9\frac{2}{3})$
 $9\frac{2}{3} = 8 + b$

$$b = 1\frac{2}{3}$$

$$k: y = 4x + 1\frac{2}{3}$$

b. $rc_m = rc_k = 4$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 4$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + x = 0$$

$$-\frac{1}{2}x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 2$$

$$y_B = f(0) = 1$$

$$B(0,1)$$

c. $rc = f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x-4)(x+2) = 0$$

$$x = 4 \quad \vee \quad x = -2$$

$$y = 14\frac{1}{3} \quad \vee \quad y = -3\frac{2}{3}$$

$$(4, 14\frac{1}{3}) \text{ en } (-2, -3\frac{2}{3})$$

Opgave 16:

a. $v(t) = h'(t) = -10t + 30$

$$v(2) = h'(2) = 10 \text{ m/s}$$

b. $h'(t) = -10t + 30 = -5$

$$-10t = -35$$

$$t = 3,5$$

c. $h(t) = -5t^2 + 30t + 1,5 = 0$

$$y_1 = -5x^2 + 30x + 1,5 \text{ calcmenu optie zero geeft } x = 6,05$$

$$t = 6,05$$

$$h'(6,05) = -30,5 \text{ m/s}$$

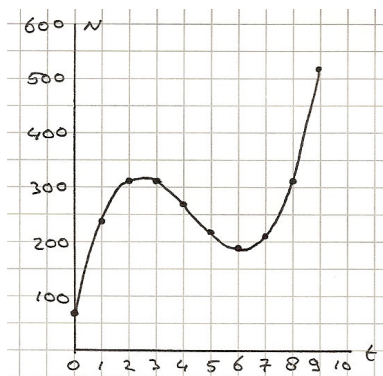
GEMENGDE OPGAVEN H3: De afgeleide functie.

Opgave 21:

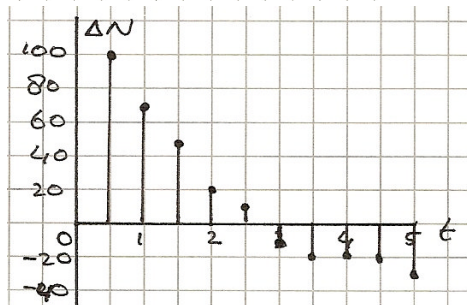
a.

jaar	N	ΔN
1995	70	
1996	240	170
1997	310	70
1998	310	0
1999	270	-40
2000	220	-50
2001	190	-30
2002	210	20
2003	310	100
2004	520	210

b.



c.



- d. $N(1) = 215$ i.p.v. 240
 $N(2) = 270$ i.p.v. 310

Opgave 22:

a. $\left[\frac{ds}{dt} \right]_{t=15} = 15,36 \frac{m}{s} = 55,3 \frac{km}{uur}$

$$\left[\frac{ds}{dt} \right]_{t=30} = 7,1 \frac{m}{s} = 25,6 \frac{km}{uur}$$

b. $s(50) = 431$

$$v(50) = \left[\frac{ds}{dt} \right]_{t=50} = 2,378 \frac{m}{s}$$

$$s(60) = 431 + 10 \cdot 2,378 = 454,8 \text{ m}$$

Opgave 23:

a. $y_A = f(-4) = -14$

$$rc = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=-4} = 19$$

$$y = 19x + b \text{ door } (-4, -14)$$

$$-14 = -76 + b$$

$$b = 62$$

$$l: y = 19x + 62$$

b. $y_B = f(0) = 2$

$$rc = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = 1,44$$

$$y = 1,44x + b \text{ door } (0, 2)$$

$$2 = b$$

$$k: y = 1,44x + 2$$

c. $y_C = f(8) = 9,2$

$$rc = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=8} = 0,632$$

$$y = 0,632x + b \text{ door } (8; 9,2)$$

$$9,2 = 5,056 + b$$

$$4,144 = b$$

$$m: y = 0,632x + 4,144$$

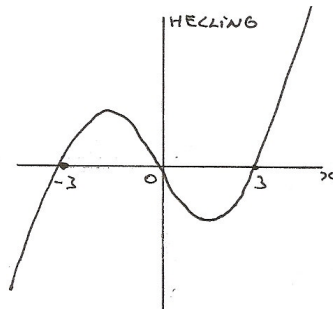
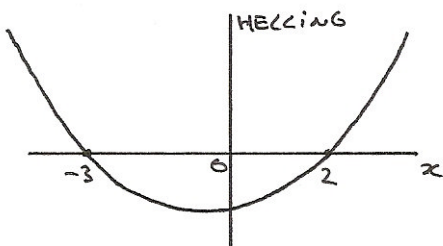
$$0,632x + 4,144 = 0$$

$$0,632x = -4,144$$

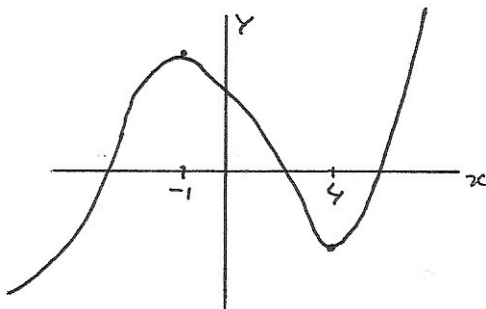
$$x = \frac{-4,144}{0,632} = -6,56$$

Opgave 24:

a.



b.



Opgave 25:

a. $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 + 5(x+h) + 6 - (3x^2 + 5x + 6)}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x^2 + 2hx + h^2) + 5x + 5h + 6 - 3x^2 - 5x - 6}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6hx + 3h^2 + 5x + 5h + 6 - 3x^2 - 5x - 6}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{6hx + 3h^2 + 5h}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} 6x + 3h + 5 = 6x + 0 + 5 = 6x + 5$

b. $g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + 3xh = 3x^2 + 0 = 3x^2$

Opgave 26:

a. $f(x) = -x(2x - 7) = -2x^2 + 7x$
 $f'(x) = -4x + 7$

b. $g(x) = (x^2 - 1)(x - 1) = x^3 - x^2 - x + 1$
 $g'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

c. $h(x) = x(3x + 2)^2 = x(9x^2 + 12x + 4) = 9x^3 + 12x^2 + 4x$
 $h'(x) = 27x^2 + 24x + 4$

d. $m(t) = 7 - \frac{t^2 + 8t}{16} = 7 - \frac{1}{16}t^2 - \frac{1}{2}t$
 $m'(t) = -\frac{1}{8}t - \frac{1}{2}$

e. $k(a) = 8 - (a - 1)^2 = 8 - (a^2 - 2a + 1) = 8 - a^2 + 2a - 1$
 $k'(a) = -2a + 2$

f. $p(x) = 5x - x(2x + 5)(x - 3) = 5x - x(2x^2 - x - 15) = 5x - 2x^3 + x^2 + 15x =$
 $-2x^3 + x^2 + 20x$
 $p'(x) = -6x^2 + 2x + 20$

Opgave 27:

$f(x) = (x^2 - 9)(x - 1) = x^3 - x^2 - 9x + 9$

a. $f'(x) = 3x^2 - 2x - 9$

$$rc = f'(2) = -1$$

$$y_A = f(2) = -5$$

$$y = -x + b \text{ door } (2, -5)$$

$$-5 = -2 + b$$

$$b = -3$$

$$k: y = -x - 3$$

b. $B(0,9)$

$$rc = f'(0) = -9$$

$$y = -9x + b \text{ door } (0,9)$$

$$9 = b$$

$$m: y = -9x + 9$$

c. $f'(-1) = -4 \neq 0$ dus de raaklijn is niet horizontaal.

Opgave 28:

a. $A(0,1)$

$$f'(x) = x^2 - x - 2$$

$$rc = f'(0) = -2$$

$$y = -2x + b \text{ door } (0,1)$$

$$1 = b$$

$$k: y = -2x + 1$$

b. $f'(x) = x^2 - x - 2 = 0$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x = 2 \quad \vee \quad x = -1$$

$$y = -2\frac{1}{3} \quad \vee \quad y = 2\frac{1}{6}$$

$$(2, -2\frac{1}{3}) \text{ en } (-1, 2\frac{1}{6})$$

c. $f'(x) = x^2 - x - 2 = 4$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = -2$$

$$y = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad y = \frac{1}{3}$$

$$(3, -\frac{1}{2}) \text{ en } (-2, \frac{1}{3})$$

Opgave 29:

a. $f(x) = (x^2 + 2)(1-x) = -x^3 + x^2 - 2x + 2$

$$f'(x) = -3x^2 + 2x - 2$$

$$y_A = f(2) = -6$$

$$rc = f'(2) = -10$$

$$y = -10x + b \text{ door } (2, -6)$$

$$-6 = -20 + b$$

$$b = 14$$

$$k: y = -10x + 14$$

b. $rc = f'(x) = -3x^2 + 2x - 2 = -10$

$$-3x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{-6} = \frac{-2 \pm 10}{-6}$$

$$x = \frac{-2-10}{-6} = 2 \quad \vee \quad x = \frac{-2+10}{-6} = -1\frac{1}{3}$$

Opgave 30:

- a. $v(t) = s'(t) = 0,18t^2 + 2,4t$
 $v(4) = s'(4) = 12,48 \text{ m/s} = 45 \text{ km/uur}$
 $v(6) = s'(6) = 15,48 \text{ m/s} = 56 \text{ km/uur}$
- b. $100 \text{ km/uur} = 27,8 \text{ m/s}$
 $0,18t^2 + 2,4t = 27,8$
 $y_1 = 0,18x^2 + 2,4x$ en $y_2 = 27,8$
 calc-menu optie intersection geeft $x = 7,43$
 dus na 7,43 sec.
- c. $s(8) = 107,52$
 $v(8) = s'(8) = 30,72$
 $107,52 + 30,72x = 300$
 $30,72x = 192,48$
 $x = 6,3$
 dus na $t = 6,3 + 8 = 14,3$ sec.